

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Проректор по учебной работе и
довузовской подготовке**

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Функциональный анализ
по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра высшей математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Зачет

6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 225, всего зач. ед.: 5

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составил: Р.В. Константинов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 21.05.2020

Аннотация

Излагаются фундаментальные вопросы функционального анализа необходимые современному инженеру-исследователю: топологические и метрические пространства, нормированные векторные пространства, пространства интегрируемых по Лебегу функций, элементы теории линейных операторов в линейных нормированных пространствах, элементы теории банаховых алгебр и спектральная теорема для нормальных операторов в гильбертовом пространстве.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение аппарата и методов функционального анализа, которые широко применяются для решения современных задач математической физики, квантовой механики, теории экстремальных задач, оптимального управления, и др.

Задачи дисциплины

- изучение топологических и метрических пространств, исследование их полноты, сепарабельности, пополнения;
- изучение компактных множеств в топологических и метрических пространствах, овладение методами исследования компактности;
- изучение линейных нормированных пространств, сильной и слабой топологии в них;
- изучение пространств интегрируемых по Лебегу функций и их сопряженных;
- изучение теории линейных ограниченных операторов, в частности, сопряжённых операторов и компактных операторов;
- изучение элементов теории банаховых алгебр и ее приложение к спектральной теории операторов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- определение частично упорядоченного множества, теорему Хаусдорфа о максимальнойности и лемму Цорна
- определения топологического пространства, базы и предбазы топологии, топологические и секвенциальные определения замкнутости и замыкания множеств, непрерывности отображений топологических пространств, и связь между этими определениями;
- определение метрического пространства, определения его полноты и сепарабельности, определение пополнения неполного метрического пространства;
- принцип Банаха сжимающих отображений полного метрического пространства и технику его применения;
- определения топологического, счётного и секвенциального компакта в топологическом пространстве и их связь, критерий Фреше компактности в метрическом пространстве;
- критерии вполне ограниченности множеств в стандартных метрических пространствах, теоремы Арцела – Асколи и Рисса – Колмогорова;
- определения линейного нормированного, банахова и гильбертова пространств, и их свойства;
- стандартные пространства интегрируемых по Лебегу функций и их свойства полноты и сепарабельности;
- определение линейного ограниченного оператора, действующего в нормированных пространствах, определения нормы оператора, пространства линейных ограниченных операторов и его свойства;
- определение пространства, сопряжённого к линейному нормированному пространству, теореме Хана–Банаха, слабую и слабую* топологию, теоремы Мазура и Банаха – Алаоглу;
- пространства, сопряженные к малым лебеговым пространствам и стандартным пространствам интегрируемых по Лебегу функций;
- определение оператора, сопряжённого к линейному ограниченному оператору, и его свойства;
- теоремы Банаха об открытом отображении, обратном операторе и замкнутом графике;
- определение и классификацию компонент спектра линейного ограниченного оператора и его свойства;
- определение компактного оператора и его свойства, теоремы Фредгольма и теорему о спектре компактного оператора;
- определение самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве, теорему Гильберта – Шмидта;
- понятие банаховой алгебры, спектра элемента банаховой алгебры и его свойства, теорему Гельфанда – Мазура;
- определение максимальных идеалов и комплексных гомоморфизмов коммутативной банаховой алгебры и связь между ними, критерий принадлежности комплексного числа спектру элемента коммутативной банаховой алгебры.
- определение преобразования Гельфанда в коммутативной банаховой алгебре, понятие инволюции и коммутативной B^* -алгебры, теорему Гельфанда – Наймарка;
- спектральную теорему для нормального оператора в гильбертовом пространстве и функциональное исчисление нормального оператора;
- критерий собственного значения нормального оператора и свойства собственных векторов нормального оператора со счетным спектром.

уметь:

- исследовать полноту и сепарабельность метрического пространства, строить пополнение неполного метрического пространства;
- исследовать ограниченность, вполне ограниченность и компактность множества метрического пространства;
- исследовать эквивалентность норм в линейном пространстве, и уметь сравнивать топологии, порождённые разными нормами в линейном пространстве;
- вычислять норму и исследовать ограниченность линейного оператора, действующего в нормированных пространствах;
- исследовать различные сходимости последовательности линейных ограниченных операторов: по операторной норме и поточечную;
- вычислять сопряжённый оператор для заданного линейного ограниченного оператора;
- вычислять спектр линейного ограниченного оператора, действующего в банаховом пространстве;
- исследовать компактность линейного ограниченного оператора, действующего в банаховых пространствах;
- вычислять норму самосопряжённого оператора, действующего в гильбертовом пространстве, с помощью его спектрального радиуса;
- вычислять резольвенту компактного самосопряжённого оператора, действующего в гильбертовом пространстве, с помощью теоремы Гильберта–Шмидта;
- вычислять спектр и спектральное разложение нормального оператора в гильбертовом пространстве.

владеть:

- методами исследования полноты, сепарабельности и пополнения метрического пространства;
- методами исследования вполне ограниченности множеств в стандартных метрических пространствах;
- методами вычисления нормы линейного оператора;
- методами вычисления сопряжённого пространства стандартных банаховых пространств;
- методами исследования слабой и слабой* сходимости последовательности в стандартных банаховых пространствах и в сопряжённых к ним;
- методами вычисления сопряжённого оператора для заданного линейного ограниченного оператора, действующего в стандартных банаховых пространствах;
- методами исследования компактности линейного оператора, действующего в стандартных банаховых пространствах;
- методами вычисления спектра и резольвенты линейного ограниченного оператора, действующего в стандартных банаховых пространствах;
- методами вычисления спектра и спектрального разложения нормального оператора в гильбертовом пространстве;
- функциональным исчислением нормального оператора в гильбертовом пространстве.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Частично упорядоченные множества.	4	4		5
2	Топологические пространства, база и предбаза топологии.	4	4		4
3	Метрические пространства, полнота, сепарабельность, пополнение.	4	4		4
4	Компактные множества в топологических и метрических пространствах.	5	4		4

5	Линейные нормированные пространства и пространства интегрируемых по Лебегу функций.	4	4		4
6	Евклидовы и гильбертовы пространства.	5	5		4
7	Линейные операторы в линейных нормированных пространствах, норма оператора.	4	5		5
8	Сопряжённое пространство, теоремы Хана–Банаха и Рисса–Фреше.	4	3		5
9	Слабая и слабая* топология.	3	4		6
10	Сопряжённые операторы, спектр оператора.	4	4		6
11	Компактные операторы, теоремы Фредгольма, спектр компактного оператора.	4	4		5
12	Самосопряжённые операторы, теорема Гильберта–Шмидта.	4	3		5
13	Банаховы алгебры, спектр элемента банаховой алгебры, группа обратимых элементов банаховой алгебры.	3	4		6
14	Коммутативные банаховы алгебры, максимальные идеалы и комплексные гомоморфизмы, преобразование Гельфанда и теорема Гельфанда – Наймарка	4	4		6
15	Спектральная теорема для нормального оператора в гильбертовом пространстве.	4	4		6
Итого часов		60	60		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		225 час., 5 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Частично упорядоченные множества.

Аксиома выбора. Лемма о неподвижном множестве. Частично упорядоченные множества. Теорема Хаусдорфа о максимальнойности и лемма Цорна.

2. Топологические пространства, база и предбаза топологии.

Топологические пространства, база и предбаза топологии. Критерии базы и предбазы для семейства подмножеств. Топологические и секвенциальные определения замкнутости и замыкания множеств топологического пространства и связь между ними, аксиома счётности. Топологическое и секвенциальное определение непрерывности отображения топологических пространств и связь между ними. Декартово произведение топологических пространств и топология Тихонова в нём.

3. Метрические пространства, полнота, сепарабельность, пополнение.

Метрическое пространство и метрическая топология. Примеры неметризуемых топологий. Полнота метрического пространства, принцип вложенных шаров и теорема Бэра. Сепарабельность метрического пространства, критерий несепарабельности. Пополнение неполного метрического пространства. Теорема Хаусдорфа о существовании пополнения. Принцип Банаха сжимающих отображений в полном метрическом пространстве.

4. Компактные множества в топологических и метрических пространствах.

Топологическая, счётная и секвенциальная компактность множеств топологического пространства и связь между ними. Теорема Александера о предбазе и теорема Тихонова о топологической компактности декартова произведения компактных топологических пространств. Вполне ограниченность множества метрического пространства. Критерий Фреше топологической и секвенциальной компактности множества в метрическом пространстве. Критерии вполне ограниченности множеств в малых лебеговых пространствах. Теорема Арцела–Асколи о вполне ограниченности множества из пространства непрерывных функций, заданных на метрическом компакте.

5. Линейные нормированные пространства и пространства интегрируемых по Лебегу функций.

Линейные нормированные пространства. Лемма Рисса о почти перпендикуляре и теорема Рисса о не вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном линейном пространстве. Полнота конечномерного подпространства линейного нормированного пространства. Пространства интегрируемых по Лебегу функций, их полнота и сепарабельность. Критерий Рисса–Колмогорова о вполне ограниченности множества в пространствах интегрируемых по Лебегу функций.

6. Евклидовы и гильбертовы пространства.

Евклидовы и гильбертовы пространства. Равенство параллелограммов. Теорема о существовании единственной метрической проекции вектора на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Ортогональное дополнение подпространства евклидова пространства. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения. Полная ортогональная система векторов и ортогональный базис в гильбертовом пространстве. Критерий полноты ортогональной системы векторов в гильбертовом пространстве.

7. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах, норма оператора.

Линейные операторы в линейных нормированных пространствах, норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов, нормированное операторной нормой, и его полнота. Теорема Банаха–Штейнгауза и полнота пространства линейных ограниченных операторов относительно поточечной сходимости. Обратный оператор, критерий ограниченности обратного оператора. Теоремы Банаха об открытом отображении, об обратном операторе и о замкнутом графике. Компактные операторы, компактность конечномерного линейного непрерывного оператора. Теорема о приближении компактного оператора конечномерным линейным непрерывным оператором по операторной норме.

Семестр: 6 (Весенний)

8. Сопряжённое пространство, теоремы Хана–Банаха и Рисса–Фреше.

Сопряжённое пространство к линейному нормированному пространству. Теорема Хана–Банаха и её следствия. Теорема об отделимости выпуклых множеств в линейном нормированном пространстве. Теорема Рисса–Фреше об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Рефлексивные и нерефлексивные пространства. Рефлексивность гильбертова пространства. Вычисление сопряженного пространства для пространства интегрируемых по Лебегу функций. Исследование рефлексивности пространств интегрируемых по Лебегу функций.

9. Слабая и слабая* топология.

Слабая топология и слабая сходимости в линейном нормированном пространстве. Теорема Мазура о б эквивалентности сильной и слабой замкнутости выпуклого множества линейного нормированного пространства и её следствия. Критерий слабой сходимости последовательности в линейном нормированном пространстве. Метризуемость слабой топологии на шаре линейного нормированного пространства. Пример фон Неймана неметризуемости слабой топологии на всём пространстве. Слабая* топология и слабая* сходимости в сопряжённом пространстве. Критерий слабой*-непрерывности линейного функционала, действующего на сопряжённом пространстве. Критерий слабой* сходимости последовательности в сопряжённом пространстве. Метризуемость слабой* топологии на шаре сопряжённого пространства. Теорема Банаха–Алаоглу и слабая компактность замкнутого шара в рефлексивном нормированном пространстве.

10. Сопряжённые операторы, спектр оператора.

Оператор, сопряжённый к линейному ограниченному оператору. Равенство норм линейного ограниченного оператора и его сопряжённого. Аннуляторы подпространств линейного нормированного пространства и его сопряжённого, и их свойства. Теоремы Фредгольма о связи ядра и множества значений оператора и его сопряжённого. Резольвента и резольвентное множество линейного ограниченного оператора в банаховом пространстве. Тождество Гильберта и аналитические свойства резольвенты. Спектр линейного ограниченного оператора в банаховом пространстве и его компоненты. Теорема о непустоте и компактности спектра. Спектральный радиус линейного ограниченного оператора. Теорема о спектральном радиусе.

11. Компактные операторы, теоремы Фредгольма, спектр компактного оператора.

Теорема об эквивалентности компактности линейного оператора оператора и компактности его сопряжённого. Четыре теоремы Фредгольма для компактных операторов в банаховом пространстве. Теорема о спектре компактного оператора.

12. Самосопряжённые операторы, теорема Гильберта–Шмидта.

Самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Вещественность спектра самосопряжённого оператора. Теорема о равенстве спектрального радиуса норме самосопряжённого оператора. Критерий принадлежности числа спектру самосопряжённого оператора. Компактные самосопряжённые операторы. Теорема Гильберта–Шмидта о существовании ортогонального базиса из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве. Вычисление резольвенты компактного самосопряжённого оператора.

13. Банаховы алгебры, спектр элемента банаховой алгебры, группа обратимых элементов банаховой алгебры.

Банаховы алгебры, пространство линейных непрерывных операторов в нормированном пространстве как банахова алгебра. Спектр и резольвента элемента банаховой алгебры, непустота и компактность спектра. Теорема о спектральном радиусе. Группа обратимых элементов банаховой алгебры и её свойства. Теорема Гельфанда–Мазура.

14. Коммутативные банаховы алгебры, максимальные идеалы и комплексные гомоморфизмы, преобразование Гельфанда и теорема Гельфанда – Наймарка

Коммутативные банаховы алгебры, идеалы и комплексные гомоморфизмы в коммутативной банаховой алгебре. Множество максимальных идеалов и его связь с множеством комплексных гомоморфизмов коммутативной банаховой алгебры. Теорема о спектре элемента коммутативной банаховой алгебры и преобразование Гельфанда. Инволюция и B^* -алгебры, теорема Гельфанда–Наймарка. Эрмитовы (самосопряженные) элементы B^* -алгебры и их спектральные свойства.

15. Спектральная теорема для нормального оператора в гильбертовом пространстве.

Пространство линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве как B^* -алгебра. Ограниченные нормальные, самосопряженные, унитарные операторы. Ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве. Разложения единицы. Спектральная теорема для нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Функциональное исчисление нормальных операторов. Критерий собственного значения нормального оператора и свойства собственных векторов нормального оператора со счетным спектром.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащённая доской и мелом.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012. — 572 с.
2. Лекции по функциональному анализу [Текст] : учеб. пособие для вузов / Р. В. Константинов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т). — М. : МФТИ, 2009. — 368 с.

Дополнительная литература

Люстерник, Л. А.

Краткий курс функционального анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие для ун-тов по специальности "Математика" / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — СПб. ; М. : Лань, 2009. — (Учебники для вузов. Специальная литература). — Электрон. версия печ. публикации. — Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
4. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Для контроля и коррекции знаний обучающиеся могут использовать задачи и тесты, размещённые на сайте [http:// sites.google.com/site/mathkonst/home/funkcionalnyj-analiz](http://sites.google.com/site/mathkonst/home/funkcionalnyj-analiz).

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над каждой темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- изучение лекций и рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций и учебной литературе),
- подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения,
- доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,
- подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, зачёту.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций. Показателем владения материалом служит умение решать практические и теоретические задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике, студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения. При подготовке к практическим занятиям необходимо повторять ранее изученные основные определения, формулировки теорем. В начале занятия, как правило, проводится короткий (10-15 минут) опрос по материалу прошедших занятий в устной или письменной форме. Обычно придерживаются следующей схемы: изучение материала лекции по конспекту в тот же день, когда была прослушана лекция (10-15 минут); повторение материала накануне следующей лекции (10-15 минут), проработка учебного материала по конспектам лекций, учебной и научной литературе, подготовка ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения (1 час неделю), подготовка к практическому занятию, решение задач (1 час). Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия. Обязательным требованием является выполнение домашних работ, которые оформляются в специально отведённой для этого тетради и систематически сдаются на проверку. Промежуточный контроль знаний проводится в виде промежуточных мини-контрольных работ, на которых студенту предлагается письменно ответить на теоретический вопрос и решить две задачи по сдаваемой теме.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Информатика и вычислительная техника
профиль подготовки:	Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра высшей математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр
Семестры, формы промежуточной аттестации:	
	5 (осенний) - Зачет
	6 (весенний) - Экзамен
Разработчик:	Р.В. Константинов, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Функциональный анализ» обучающийся должен:

знать:

- определение частично упорядоченного множества, теорему Хаусдорфа о максимальнойности и лемму Цорна
- определения топологического пространства, базы и предбазы топологии, топологические и секвенциальные определения замкнутости и замыкания множеств, непрерывности отображений топологических пространств, и связь между этими определениями;
- определение метрического пространства, определения его полноты и сепарабельности, определение пополнения неполного метрического пространства;
- принцип Банаха сжимающих отображений полного метрического пространства и технику его применения;
- определения топологического, счётного и секвенциального компакта в топологическом пространстве и их связь, критерий Фреше компактности в метрическом пространстве;
- критерии вполне ограниченности множеств в стандартных метрических пространствах, теоремы Арцела – Асколи и Рисса – Колмогорова;
- определения линейного нормированного, банахова и гильбертова пространств, и их свойства;
- стандартные пространства интегрируемых по Лебегу функций и их свойства полноты и сепарабельности;
- определение линейного ограниченного оператора, действующего в нормированных пространствах, определения нормы оператора, пространства линейных ограниченных операторов и его свойства;
- определение пространства, сопряжённого к линейному нормированному пространству, теореме Хана–Банаха, слабую и слабую* топологию, теоремы Мазура и Банаха – Алаоглу;
- пространства, сопряженные к малым лебеговым пространствам и стандартным пространствам интегрируемых по Лебегу функций;
- определение оператора, сопряжённого к линейному ограниченному оператору, и его свойства;
- теоремы Банаха об открытом отображении, обратном операторе и замкнутом графике;
- определение и классификацию компонент спектра линейного ограниченного оператора и его свойства;
- определение компактного оператора и его свойства, теоремы Фредгольма и теорему о спектре компактного оператора;
- определение самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве, теорему Гильберта – Шмидта;
- понятие банаховой алгебры, спектра элемента банаховой алгебры и его свойства, теорему Гельфанда – Мазура;
- определение максимальных идеалов и комплексных гомоморфизмов коммутативной банаховой алгебры и связь между ними, критерий принадлежности комплексного числа спектру элемента коммутативной банаховой алгебры.
- определение преобразования Гельфанда в коммутативной банаховой алгебре, понятие инволюции и коммутативной B^* -алгебры, теорему Гельфанда – Наймарка;
- спектральную теорему для нормального оператора в гильбертовом пространстве и функциональное исчисление нормального оператора;
- критерий собственного значения нормального оператора и свойства собственных векторов нормального оператора со счетным спектром.

уметь:

- исследовать полноту и сепарабельность метрического пространства, строить пополнение неполного метрического пространства;
- исследовать ограниченность, вполне ограниченность и компактность множества метрического пространства;
- исследовать эквивалентность норм в линейном пространстве, и уметь сравнивать топологии, порождённые разными нормами в линейном пространстве;
- вычислять норму и исследовать ограниченность линейного оператора, действующего в нормированных пространствах;
- исследовать различные сходимости последовательности линейных ограниченных операторов: по операторной норме и поточечную;
- вычислять сопряжённый оператор для заданного линейного ограниченного оператора;
- вычислять спектр линейного ограниченного оператора, действующего в банаховом пространстве;
- исследовать компактность линейного ограниченного оператора, действующего в банаховых пространствах;
- вычислять норму самосопряжённого оператора, действующего в гильбертовом пространстве, с помощью его спектрального радиуса;
- вычислять резольвенту компактного самосопряжённого оператора, действующего в гильбертовом пространстве, с помощью теоремы Гильберта–Шмидта;
- вычислять спектр и спектральное разложение нормального оператора в гильбертовом пространстве.

владеть:

- методами исследования полноты, сепарабельности и пополнения метрического пространства;
- методами исследования вполне ограниченности множеств в стандартных метрических пространствах;
- методами вычисления нормы линейного оператора;
- методами вычисления сопряжённого пространства стандартных банаховых пространств;
- методами исследования слабой и слабой* сходимости последовательности в стандартных банаховых пространствах и в сопряжённых к ним;
- методами вычисления сопряжённого оператора для заданного линейного ограниченного оператора, действующего в стандартных банаховых пространствах;
- методами исследования компактности линейного оператора, действующего в стандартных банаховых пространствах;
- методами вычисления спектра и резольвенты линейного ограниченного оператора, действующего в стандартных банаховых пространствах;
- методами вычисления спектра и спектрального разложения нормального оператора в гильбертовом пространстве;
- функциональным исчислением нормального оператора в гильбертовом пространстве.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Промежуточная аттестация по дисциплине «Функциональный анализ» осуществляется в форме зачёта в осеннем семестре и экзамена в весеннем семестре. Экзамен проводится в устной форме.

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Зачет проводится по итогам сдачи заданий, результатов промежуточных контрольных работ, и результатов специального итогового опроса, проводимого в устной и (или) письменной форме.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется _1 астрономический час_ на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.

«СОГЛАСОВАНО»

Проректор по учебной работе и довузовской подготовке

_____ А. А. Воронов

«_____» _____ 2018

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

Дисциплина: Функциональный анализ, 3 курс, 5 семестр, зачет ФИВТ

Кафедра: высшей математики

№	Вид занятий	Сумма баллов
1.	Контрольная работа № 1 по сдаче 1 задания	0 – 10
2.	Задание № 1 (тетрадь и ее защита)	0 – 4
3.	Работа на семинарах	0 – 2
4.	Устный опрос, включающий проверку теоретических знаний (на семинарах)	0 – 14
	Итого за работу в семестре	0 – 30

Зачет выставляется по результатам работы в семестре.

Если студент имеет не менее 20 баллов за работу в семестре, то он считается сдавшим зачет.

Если сумма баллов за работу в семестре меньше 20, то студенту предоставляется возможность получить зачет в зачетную неделю, при этом баллы за работу в семестре не изменяются.

Если сумма баллов за работу в семестре ≤ 8 , то студент считается не выполнившим обязанности по добросовестному освоению образовательной программы и выполнению учебного плана, о чем сообщается в деканат.

Студенты, не получившие зачет к началу экзаменационной сессии, ликвидируют академическую задолженность в установленные для этого сроки.

Баллы, набранные за работу в 5-ом семестре, будут учитываться в 6-ом семестре.

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой

Г.Е. Иванов

Балльно-рейтинговая система оценки знаний студентов

Дисциплина: «Функциональный анализ», 3 курс, 6 семестр, ФИВТ, экзамен.

Кафедра: высшей математики.

№	Виды занятий	Сумма баллов
1.	Контрольная работа № 1 по сдаче 1 задания	0 – 18
2.	Задание № 1	0 – 6
3.	Проверка теоретических знаний	0 – 3
4.	Работа на семинарах	0 – 3
5.	Итоговый контроль. Экзамен (устный ответ)	0 – 70
	ИТОГО	0 – 100

Сумма баллов за устный ответ начисляется по формуле $N \cdot 7$, где $N \geq 3$ – предварительная оценка за устный ответ по десятибалльной шкале. Если $N=1, 2$, то итоговая оценка совпадает с N .

Соответствие оценок итоговой академической успеваемости балльно-рейтинговой системы (БРС).

Баллы БРС	Оценки	
93 – 100	10	отлично
86 – 92	9	
79 – 85	8	
72 – 78	7	хорошо
65 – 71	6	
58 – 64	5	
51 – 57	4	удовлетворительно
40 – 50	3	
31 – 39	2	неудовлетворительно
0 – 30	1	

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой

_____ Г.Е. Иванов

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Функциональный анализ» осуществляется в форме зачёта в осеннем семестре и экзамена в весеннем семестре. Экзамен проводится в устной форме.

Примеры контрольных вопросов зачёта:

1. Топологическое пространство, база топологии. Критерии базы топологии для семейства множеств. Критерий непрерывности отображения топологических пространств.
2. Метрическое пространство, метрическая топология и её база. Критерий полноты метрического пространства (принцип вложенных шаров).
3. Топологии Тихонова декартова произведения топологических пространств. Пример неметризуемой топологии Тихонова декартова произведения метрических пространств.
4. Счётная и секвенциальная компактность множества в топологическом пространстве, их связь. Связь свойства счётной компактности множества и существования в нем у любого его бесконечного подмножества предельной точки.
5. Вполне ограниченность множества метрического пространства. Критерий Фреше компактности множества в метрическом пространстве.
6. Теорема Арцела-Асколи о вполне ограниченности множества в пространстве $C(K)$, где (K, ρ) - компактное метрическое пространство.
7. Критерий Рисса–Колмогорова вполне ограниченности множества в лебеговом пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$.
8. Лемма Рисса о почти перпендикуляре и теорема Рисса о некомпактности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.
9. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве. Полнота конечномерного подпространства линейного нормированного пространства.
10. Базис Гамеля в линейном пространстве. Несчетность базиса Гамеля в бесконечномерном банаховом пространстве.
11. Линейное нормированное пространство $L(X, Y)$. Теорема о полноте пространства $L(X, Y)$.
12. Теорема Банаха–Штейнгауза. Теорема о полноте пространства $L(X, Y)$ относительно поточечной сходимости.

Примеры контрольных заданий зачёта:

1. Метрическое пространство, состоящее из всех непрерывных на оси вещественных финитных функций с метрикой равномерной сходимости исследовать на полноту и сепарабельность. Если пространство окажется неполным, построить его пополнение, состоящее из вещественных функций.

2. Множество всех непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ вещественных функций, абсолютное значение производной которых не превосходит единицы, исследовать на равностепенную непрерывность и полноту в пространстве $C[0,1]$. Если множество окажется неполным, построить его пополнение в пространстве $C[0,1]$.
3. Вычислить норму оператора Вольтерра, действующего в пространстве $C[0,1]$, или $L_1[0,1]$, или $L_2[0,1]$, или из пространства $L_2[0,1]$ в пространство $L_1[0,1]$.

Примеры экзаменационных билетов:

1. Частично упорядоченные множества. Теорема Хаусдорфа о максимальнойности и лемма Цорна.
2. Топологические пространства, база и предбаза топологии. Критерий базы и критерий предбазы топологии.
3. Метрические пространства, метрическая топология и ее база. Сепарабельные метрические пространства. Критерий несепарабельности метрического пространства.
4. Компактные множества топологического пространства. Теорема Александера о предбазе и теорема Тихонова о компактности декартова произведения компактных топологических пространств.
5. Секвенциально и счетно компактные множества топологического пространства, связь между ними. Примеры компактного топологического пространства, не являющегося секвенциально компактным, и наоборот.
6. Вполне ограниченные множества метрического пространства. Критерий Фреше топологической компактности множества метрического пространства.
7. Теорема Арцела–Асколи о вполне ограниченном множестве в пространстве $C(K)$ для компактного метрического пространства (K, ρ) .
8. Критерий Рисса–Колмогорова вполне ограниченности множества в лебеговом пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$.
9. Три определения эквивалентности норм в линейном пространстве, равносильность этих определений. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном линейном пространстве.
10. Лемма Рисса о почти перпендикуляре и теорема Рисса об отсутствии вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.
11. Теорема Хана–Банаха о продолжении вещественно–линейного функционала, ограниченного полуаддитивной положительно–однородной функцией, и ее следствия.
12. Слабая* топология в сопряженном пространстве. Теорема Банаха–Алаоглу о слабой* компактности шара в сопряженном пространстве.
13. Теорема о метризуемости слабой* топологии на шарах в сопряженном пространстве. Пример отсутствия слабой* секвенциальной компактности шара в сопряженном пространстве.
14. Слабая топология в линейном нормированном пространстве. Теорема Мазура о слабой замкнутости выпуклого сильно замкнутого множества линейного нормированного пространства.
15. Рефлексивные линейные нормированные пространства. Теоремы о слабой топологической и секвенциальной компактности шара рефлексивного линейного нормированного пространства.
16. Теорема Рисса–Фреше о сопряженном гильбертовом пространстве. Рефлексивность гильбертова пространства.
17. Линейное нормированное пространство $L(X,Y)$ для линейных нормированных пространств X и Y . Теорема о полноте пространства $L(X,Y)$. Неполнота пространства $L(X,Y)$ при неполном Y и нетривиальном X .

18. Теорема Банаха–Штейнгауза. Теорема о полноте пространства $L(X, Y)$ относительно поточечной сходимости. Ограниченность слабо и слабо* сходящихся последовательностей в линейном нормированном пространстве и его сопряженном
19. Теоремы Банаха об открытом отображении и об обратном операторе. Пример линейного непрерывного оператора, имеющего неограниченный обратный.
20. Теорема Банаха о замкнутом графике. Теорема Хеллингера–Теплица о непрерывности симметричного линейного оператора в гильбертовом пространстве.
21. Сопряженный оператор A^* для линейного оператора A из $L(X, Y)$. Теорема о равенстве норм операторов A и A^* . Эрмитово сопряженный оператор для линейного непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.
22. Аннуляторы подпространств в линейном нормированном пространстве и его сопряженном. Связь левого аннулятора ядра сопряженного оператора с множеством значений оператора, правого аннулятора ядра оператора с множеством значений сопряженного оператора.
23. Теорема об эквивалентности замкнутости множества значений линейного непрерывного оператора и множества значений его сопряженного. Связь сюръективности оператора и ограниченности снизу его сопряженного.
24. Компактные линейные операторы. Теорема о связи компактности линейного ограниченного оператора и его сопряженного.
25. Банаховы алгебры. Пространство $L(X)$ как банахова алгебра. Группа обратимых элементов банаховой алгебры и ее открытость.
26. Спектр элемента банаховой алгебры, его непустота и компактность. Теорема Гельфанда–Мазура.
27. Теорема о спектральном радиусе элемента банаховой алгебры. Непрерывная зависимость спектра от элемента банаховой алгебры.
28. Максимальные идеалы и комплексные гомоморфизмы коммутативной банаховой алгебры, связь между ними. Критерий принадлежности комплексного числа спектру элемента коммутативной банаховой алгебры.
29. Пространство максимальных идеалов коммутативной банаховой алгебры A как компактное хаусдорфово топологическое пространство с топологией, индуцированной из сопряженного пространства A^* .
30. Преобразование Гельфанда коммутативной банаховой алгебры. V^* -алгебры и теорема Гельфанда–Наймарка.
31. Эрмитовы элементы V^* -алгебры и их спектральные свойства: вещественность спектра, равенство нормы и спектрального радиуса.
32. Минимальная замкнутая подалгебра A , порожденная нормальным элементом x и его сопряженным x^* в некоторой V^* -алгебре. Изометрический изоморфизм между пространством непрерывных комплексных функций на спектре x и подалгеброй A .
33. Банахова алгебра $L(H)$ гильбертова пространства H как V^* -алгебра. Спектральная теорема для нормального оператора из $L(H)$.
34. Критерий собственного значения нормального оператора из $L(H)$ для гильбертова пространства H в терминах спектрального разложения оператора. Свойство собственных векторов нормального оператора со счетным спектром.
35. Спектральный критерий компактности нормального оператора из пространства $L(H)$ для гильбертова пространства H

4. Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Зачет проводится по итогам сдачи заданий, результатов промежуточных контрольных работ, и результатов специального итогового опроса, проводимого в устной и (или) письменной форме.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.